2次元戸田分子方程式(数式処理と数学研究への応用)

広田, 良吾

数理解析研究所講究録
646巻 1988年 147-150

2次元戸田分子方程式

広大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

現在ソリトン方程式として知られている非線形偏微分(差分)方程式のほとんどすべてが変換によって2次形式(Bilinear form)に書き直せることが知られている。微分方程式の解をWronskian (or Casorati 行列式)表示すると、2次形式は行列式のもつ特別な関係式(例えば Plücker relation, Jacobi の公式)に対応している。

2次元戸田分子方程式の解のWronskian表現 $\tau_N^{(\ell)}$ は

$$\tau_N^{(\ell)} = \det\left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x_1^{j-1}\partial y_1^{i-1}} \phi^{(\ell)} \right|_{1\le i,j\le N}, \qquad \tau_0^{(\ell)} = 1, \quad \tau_{-1}^{(\ell)} = 0,$$

where $\phi^{(\ell)} = (a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_1)^{\ell} \phi^{(0)}, \qquad \ell \geq 0,$

$$\phi^{(-\ell)} = (a_0 \frac{\partial}{\partial y_1} + b_0)^{\ell} \phi^{(0)}, \qquad \ell > 0,$$

$\phi^{(0)}$ は x, y の任意関数

と表現される。

$\tau_N^{(\ell)}$ のもついろいろな関係式が数式処理 Reduce 3.3 を使って推定された。以下の式は $N = 0, 1, 2, 3$ まで成立することが数式処理で確かめられた。

まず2項演算子 $D_{x_1}^m D_{y_1}^n f \cdot g$ $(m, n \geqq 0)$ を次式で導入する。

$$D_{x_1}^m D_{y_1}^n f \cdot g \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_1'}\right)^n f(x_1, y_1)\, g(x_1', y_1') \Big|_{\substack{x_1' = x_1 \\ y_1' = y_1}}.$$

この記号を用いると関係式は次のようになる。

(1) $\quad D_{x_1} D_{y_1} \tau_N^{(\ell)} \cdot \tau_N^{(\ell)} = 2\, \tau_{N+1}^{(\ell)} \tau_{N-1}^{(\ell)},$

(2) $\quad D_{x_1} \tau_N^{(-1)} \cdot \tau_N^{(0)} = a_0\, \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(-1)},$

(3) $\quad D_{y_1} \tau_N^{(1)} \cdot \tau_N^{(0)} = a_1\, \tau_{N+1}^{(0)} \tau_{N-1}^{(1)},$

(4) $\quad (a_0 D_{y_1} + b_0)\, \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_N^{(-1)} = \tau_{N+1}^{(-1)} \tau_N^{(0)},$

(5) $\quad (a_1 D_{x_1} + b_1)\, \tau_{N+1}^{(0)} \cdot \tau_N^{(1)} = \tau_{N+1}^{(1)} \tau_N^{(0)},$

ここで a_0, a_1, b_0, b_1 は定数，

(6) $D_{x_1}D_{y_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(-1)}=(a_0D_{y_1}+2b_0)\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(-1)}$,

(7) $D_{x_1}D_{y_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(1)}=(a_1D_{x_1}+2b_1)\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(1)}$,

(8) $a_0D_{y_1}\tau_{N-1}^{(-1)}\cdot\tau_N^{(1)}+a_1D_{x_1}\tau_N^{(-1)}\cdot\tau_{N-1}^{(1)}$
$=b_0\tau_{N-1}^{(-1)}\tau_N^{(1)}-b_1\tau_N^{(-1)}\tau_{N-1}^{(1)}$,

(9) $D_{y_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(2)}+a_1^2D_{x_1}\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(0)}=-2a_1b_1\tau_{N+1}^{(0)}\tau_{N-1}^{(2)}$,

(10) $D_{x_1}\tau_N^{(0)}\cdot\tau_N^{(-2)}+a_0^2D_{y_1}\tau_{N+1}^{(0)}\cdot\tau_{N-1}^{(-2)}=-2a_0b_0\tau_{N+1}^{(0)}\tau_{N-1}^{(-2)}$.

(1)式は2次元戸田分子方程式の2次形式表現であり，任意の N で成立する。

(2), (3), (4), (5) 式は2次元戸田分子方程式に対する Bäcklund 変換の式である。$b_0=b_1=0$ のときは任意の N で成立することが証明されている。

(6)式以下が新しい関係式である。

任意関数 $\phi^{(0)}$ に新しい条件（例えば $\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\phi^{(0)}=\phi^{(0)}$）を追加すると，$\tau_N^{(\ell)}$ は色々な新しい関係式をみたすよう

になる。これらの式は色々なソリトン方程式例えば

Massive Thirring Equation,

Pohlmeyer - Lund - Regge - Getmanov 方程式

Derivative nonlinear Schrödinger 方程式

Two - dimensional nonlinear Schrödinger 方程式

などの2次形式に関係していることが分った。

数学研究では新しい関係式を導出することが大切であるが，関係式を予想し，数式処理を使ってこれをチェックし，あとで一般的証明を与えるという方法は研究のスピード化に非常に有用である。